

# Upotreba *Simulink*-a za rešavanje inženjerskih problema na primeru termičkog modela električne mašine

Pripremljeno kao pomoćni material kurseva OG4EV, kao i *Digitalno upravljanje pretvaračima i pogonima*

Kontakt: [ddc@etf.bg.ac.yu](mailto:ddc@etf.bg.ac.yu)

### *1. Uvod*

Onog trenutka kada su računari postali dovoljno «moćni» da mogu relativno verodostojno da prikažu ponašanje realnih, fizičkih sistema, simulacije procesa postale su nezaobilazan stepen u projektovanju bilo kakvih sistema. Jedan od danas najrasprostranjenijih programa za računarsku simulaciju je *Simulink* iz programskog paketa *MatLab* čije će osnovne primene biti opisane u ovoj vežbi.

Kao primer sistema koji će biti simuliran uzet je jednostavan model prvog reda, povezan za termičke procese u električnoj mašini. Na ovom primeru biće prikazan način na koji se formira *Simulink* model procesa, kao i pokretanje simulacije u rad i interpretacija rezultata simulacije.

## *2. Termički procesi u električnoj mašini*

Pri radu električne mašine, usled postojanja otpornosti namotaja u kojima postoji struja dolazi do pojave Džulovih gubitaka tj. stvaranja toplice. Ovi gubici srazmerni su kvadratu struje, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti zapravo otpornost samog namotaja.

Ova toplotna energija se «troši» na dva načina: jedan deo energije se konvekcijom disipira u okolinu dok preostali deo energije uvećava temperaturu motora. Očigledno je da je zagrevanje motora neophodno svesti na minimum jer porast temperature iznad izvesne granice (oko 150°C) izaziva uništavanje izolacije namotaja tj. dovodi do trajnog oštećenja mašine.

Maksimalna struja koja se može imati u trajnom radu je nominalna struja. Pri trajnom radu na većim strujama zagrevanje mašine je preveliko tj. nedovoljna količina Džulovih gubitaka biva konvekcijom prenesena na ambijent i dolazi do preteranog porasta temperature i trajnog oštećenja mašine.

Dakle, pri projektovanju električne mašine jedan od najvažnijih faktora koji se mora uzeti u razmatranje je upravo zagrevanje mašine. U cilju analize ovog fenomena formira se termički model mašine čiji ćemo osnovni oblik opisati i testirati u ovoj laboratorijskoj vežbi.

### 3. Model termički homogenog tela

Termički model elektične mašine zasnovan je na modelu termički homogenog tela. Ovaj model baziran je na dva parametra: termičkom otporu i termičkoj kapacitativnosti.

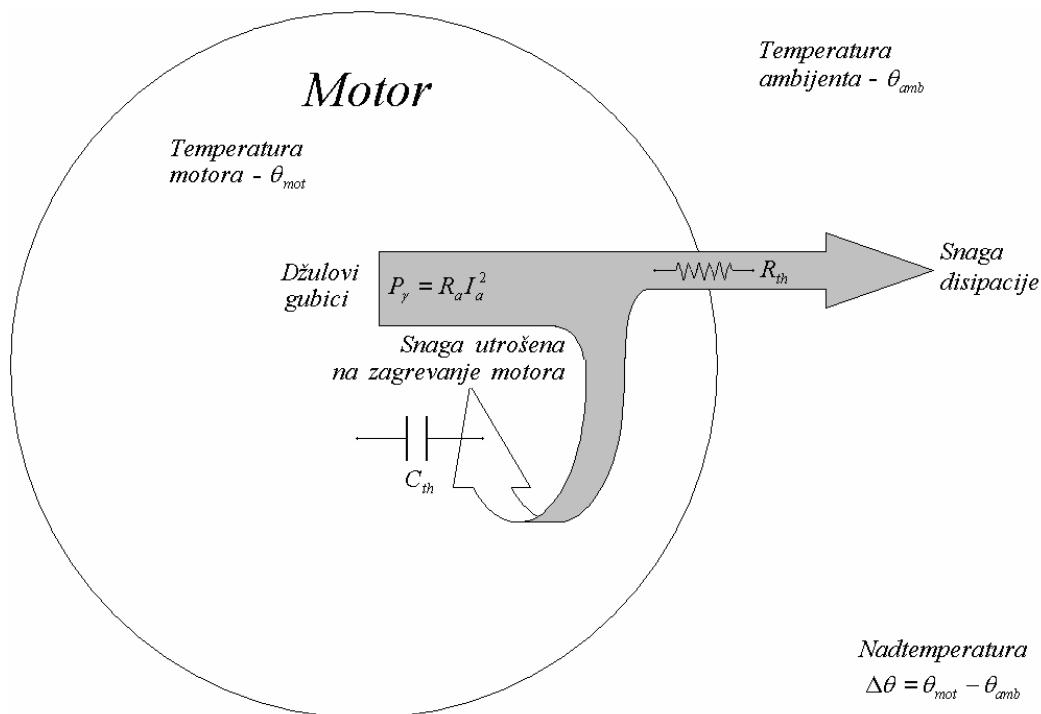
Termički otpor je mera osobine materijala da se opire protoku toplote - u našem slučaju odavanju toplote u spoljnu okolinu mašine. To je zapravo količnik temperaturne razlike tela i ambijenta (nadtemperature) i snage koja biva disipirana u okolinu:

$$R_{th} = \frac{\Delta\theta}{P_{dis}} \left[ \frac{K}{W} \right] \dots\dots\dots(1)$$

Termička kapacitativnost definiše se kao odnos toplotne energije  $dW$  koju je potrebno dodati telu da bi se njegova temperatura promenila za iznos  $d\theta$ .

$$C_{th} = \frac{dW}{d\theta} \left[ \frac{J}{K} \right] \dots\dots\dots(2)$$

Šematski prikaz ovog modela dat je na slici 1.



Slika 1: Šematski prikaz motora kao termički homogenog tela

Odredimo sada izraz po kome se menja temperatura tela tj. motora u zavisnosti od snage Džulovih gubitaka. U tom cilju definišimo sledeće oznake:

$P_\gamma$  - snaga Džulovih gubitaka

$P_{dis}$  - snaga koja se konvekcijom disipira u spoljnu okolinu

$P_{mot}$  - snaga koja se troši na zagrevanje motora

$\theta_{mot}$  - temperatura motora

$\theta_{amb}$  - temperatura ambijenta

$\Delta\theta = \theta_{mot} - \theta_{amb}$  - nadtemperatura

$R_{th}$  - termički otpor motora

$C_{th}$  - termička kapacitativnost motora

Podimo od definicionog izraza za termičku kapacitativnost za slučaj motora datog jednačinom 3:

$$C_{th} = \frac{dW_{mot}}{d\theta_{mot}} \dots\dots\dots(3)$$

Količina energije koja se u infinitezimalnom vremenskom periodu iskoristi na zagrevanje motora data je sledećom relacijom:

$$dW_{mot} = P_{mot} dt \dots\dots\dots(4)$$

pri čemu se sa slike 1 može videti da je snaga  $P_{mot}$  jednaka razlici snage Džulovih gubitaka i snage disipirane konvekcijom u spoljnu sredinu:

$$P_{mot} = P_\gamma - P_{dis} \dots\dots\dots(5)$$

Pod prepostavkom da je promena temperature ambijenta usled disipacije snage sa motora zanemarljivo mala, promena temperature motora  $d\theta$  biće jednaka promeni nadtemperature  $d\Delta\theta$ :

$$d\theta_{mot} = d\Delta\theta + d\theta_{amb} = d\Delta\theta \dots\dots\dots(6)$$

Sada se jednačina 3 svodi na:

$$C_{th} = \frac{(P_\gamma - P_{dis})dt}{d\Delta\theta} \dots\dots\dots(7)$$

Iz izraza za termički otpor (jednačina 1) sledi jednačina 8:

$$P_{dis} = \frac{\Delta\theta}{R_{th}} \dots\dots\dots(8)$$

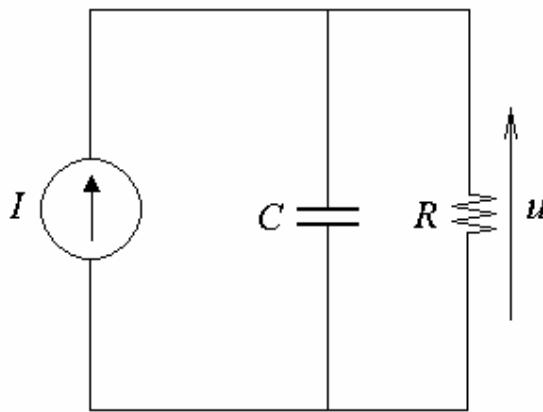
Zamenom jednačine 8 u jednačinu 7 i sređivanjem tog izraza dobija se diferencijalna jednačina koja opisuje promenu nadtemperature u vremenu izazvane Džulovim gubicima:

$$C_{th} \frac{d\Delta\theta}{dt} = P_\gamma - \frac{\Delta\theta}{R_{th}} \dots\dots\dots(9)$$

#### 4. Električni dual termičkog modela motora

U cilju boljeg razumevanja termičkog modela mašine, razmatranje ćemo nastaviti na električnom dualu ovog sistema. Naime, ukoliko pronađemo električno kolo koje ima identičnu prenosnu funkciju kao i termički model motora, tada će to kolo moći da se koristi kao električna prezentacija termičkih procesa koji se u mašini odvijaju.

Posmatrajmo paralelno  $RC$  kolo napajano strujnim izvorom (slika 2).



Slika 2: Paralelno  $RC$  kolo napajano strujnim izvorom

Iz teorije kola poznato je da je ovo kolo opisano diferencijalnom jednačinom datom jednačinom 10:

$$C \frac{du}{dt} = I - \frac{u}{R} \dots\dots\dots(10)$$

Upoređivanjem jednačine 9 i jednačine 10 vidimo da one imaju identičan oblik. Dakle, očigledno je da postoji potpuni dualizam između termičkog i električnog modela pri čemu su dualni elementi dati tabelom 1:

Termički model	Električni model
Termički otpor ( $R_{th}$ )	Električni otpor ( $R$ )
Termička kapacitativnost ( $C_{th}$ )	Električni kapacitet ( $C$ )
Džulovi gubici ( $P_\gamma$ )	Strujni izvor ( $I$ )
Nadtemperatura ( $\Delta\theta$ )	Električni napon ( $u$ )

Tabela 1: Dualizam termičkog i električnog modela

### 5. Simulink model

Posmatrajući jednačinu 10 možemo definisati prenosnu funkciju paralelnog  $RC$  kola. U kompleksnom tj.  $s$ -domenu ova jednačina ima sledeći oblik:

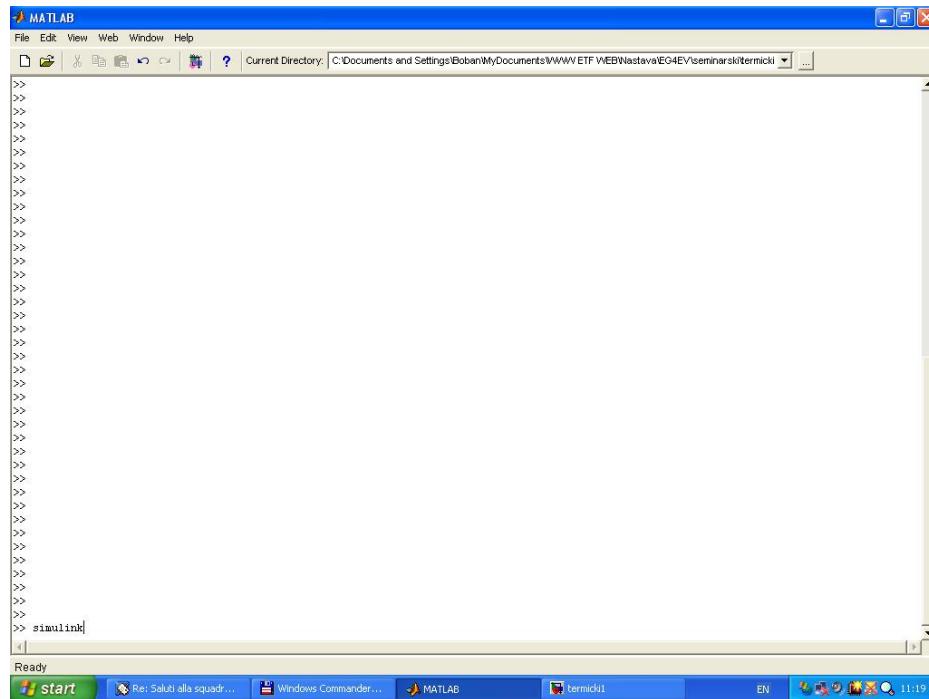
$$sCU(s) = I(s) - \frac{U(s)}{R} \dots\dots\dots(11)$$

Odavde se dobija prenosna funkcija sistema od ulaza (strujnog izvora -  $I(s)$ ) do izlaza (napona na paralelnom  $RC$  kolu –  $U(s)$ ):

$$\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{R}{1 + sRC} \dots\dots\dots(12)$$

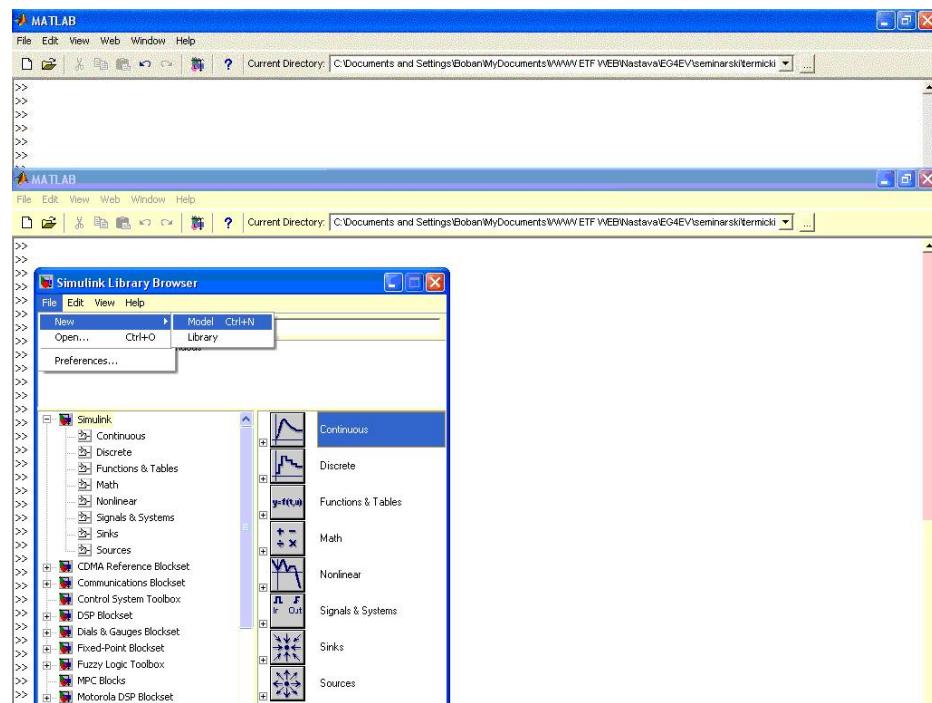
Ova prenosna funkcija predstavlja direktni model paralelnog  $RC$  kola napajanog strujnim izvorom, ali obzirom na dualziam opisan u prethodnom poglavljju, i termički model električne mašine biće opisan prenosnom funkcijom istog oblika samo što će u njoj umesto električnog otpora i kapacitivnosti figurisati termički otpor i kapacitativnost.

Simulirajmo sada ovaj model u *Simulink*-u. *Simulink* se pokreće startovanjem komande *simulink* u komandnom prozoru (*Comand Window*) MatLab-a (Slika 3):

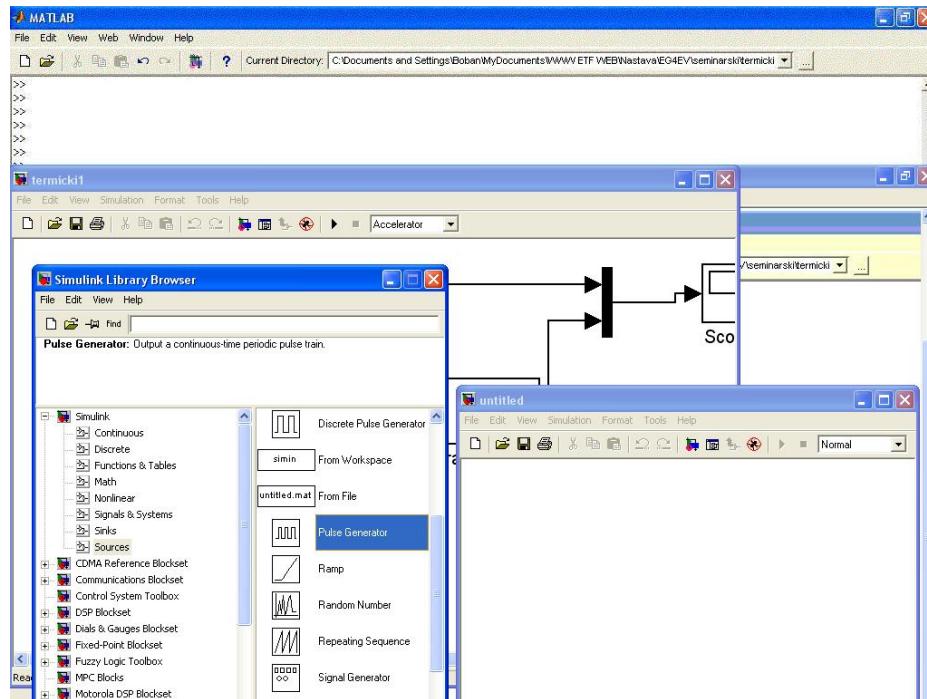


Slika 3: Pokretanje *Simulink*-a

Ovime je učitana *Simulink* biblioteka. Sada je potrebno pokrenuti novi model. Ovo se vrši izborom komande *New-Model* u *File* padajućem meniju prozora *Simulink Library Browser* (Slika 4).

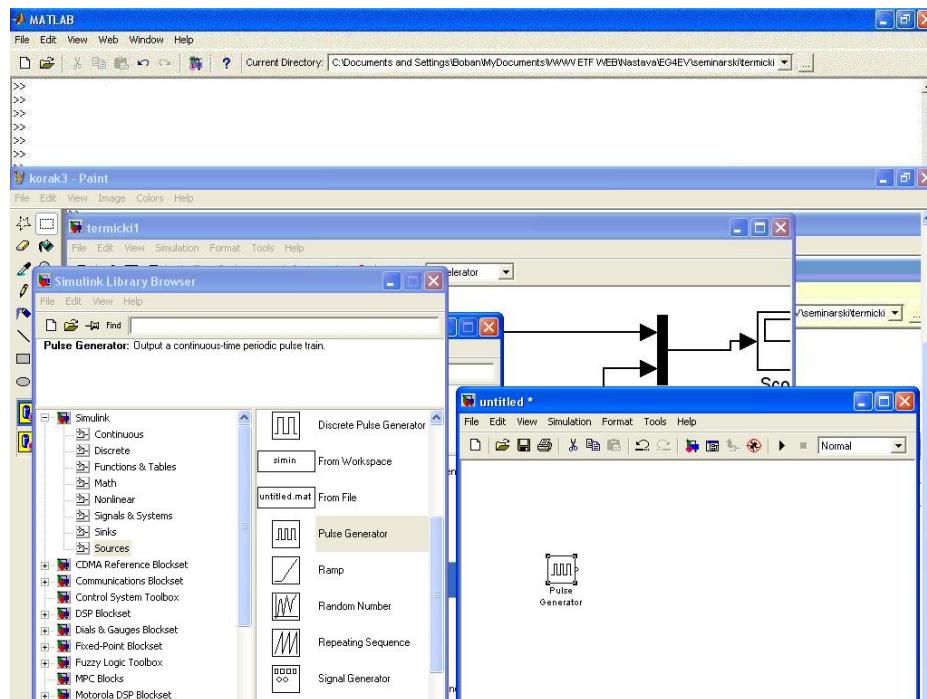


Slika 4: Pokretanje novog modela



Slika 5: Generator impulsa – Pulse generator

Prvi elemenat koji ćemo uneti u model jeste generator impulsa (*Pulse Generator*) – on će nam predstavljati ulaz modela (u slučaju *RC* kola to je strujni generator a u slučaju termičkog modela to su Džulovi gubici u motoru). Ovaj elemenat nalazi se u biblioteci *Simulink - Sources* (slika 5). Elementi se iz biblioteka u model unose prevlačenjem (drag and drop) željenog bloka na prozor modela (slika 6).



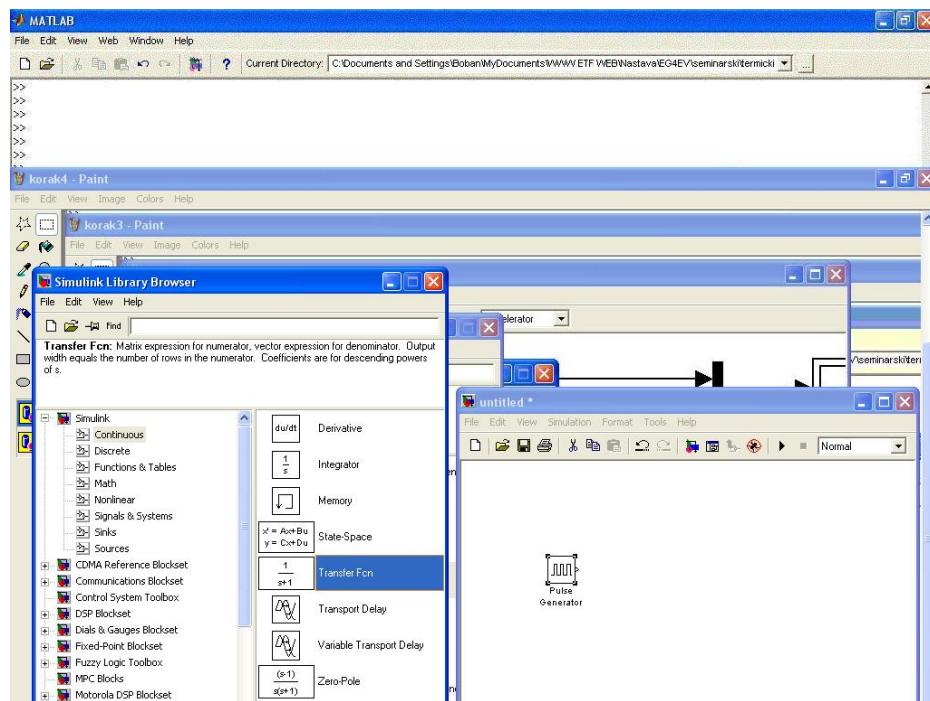
Slika 6: Generator impulsa uveden u simulink model

Dalje ćemo u model uvesti blok prenosne funkcije (*Transfer Fcn*). Ovaj blok nalazi se u biblioteci *Simulink - Continuous* (slika 7).

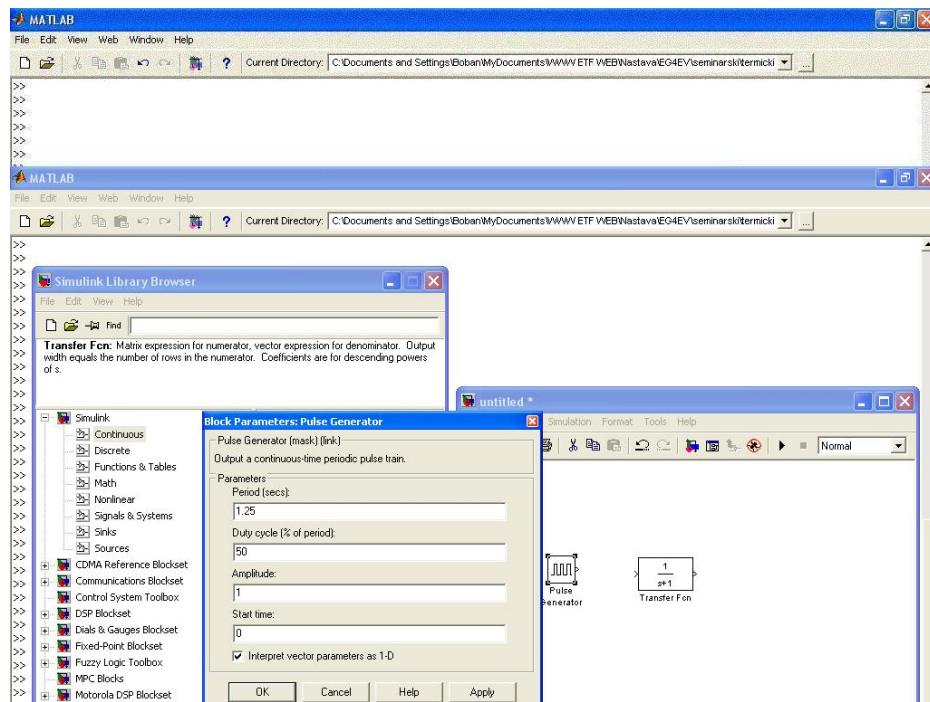
Sada je potrebno definisati parametre ova dva bloka. Dvostrukim klikom na blok u modelu otvara se prozor koji omogućuje podešavanje parametara za dati blok. Pri vrhu ovog prozora nalazi se i kratak opis funkcije bloka.

U slučaju bloka *Pulse Generator* mogu se podešavati period impulsa – *Period*; ispunu impulsa tj. procentualni iznos unutar impulsne periode za vreme kog je vrednost na izlazu jednaka amplitudi impulsa (različita od nule) – *Duty cycle*; amplituda impulsa – *Amplitude* i trenutak simulacije u kome će generator početi da radi – *Start time*. U našem slučaju postavićemo period impulsa na 1,25 sekundi, ispunu na 50% a amplitudu impulsa na 1 (Slika 8). Podešeni parametri čuvaju se

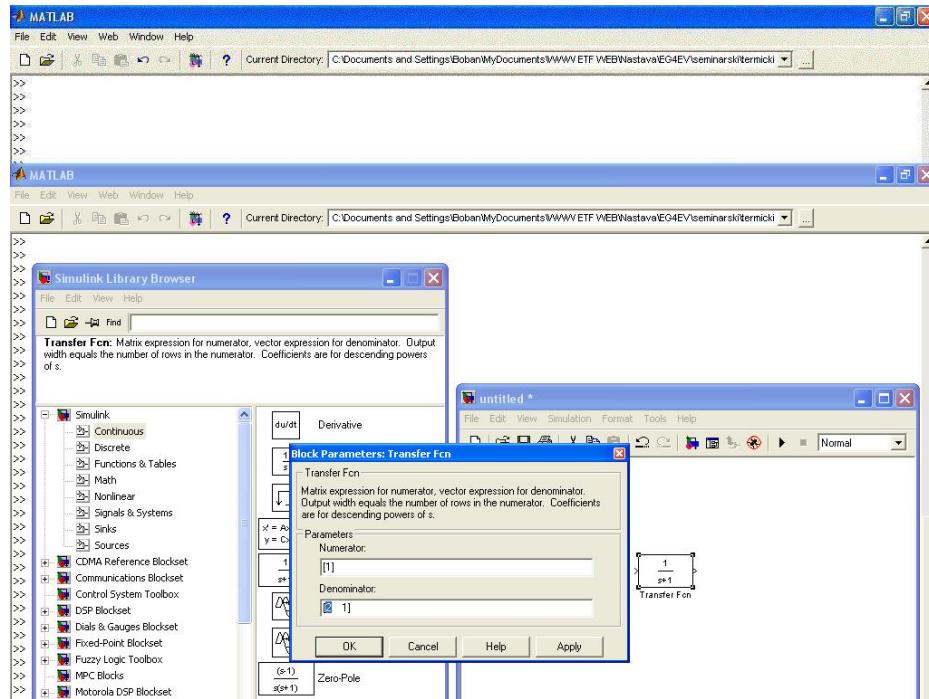
klikom na OK. Amplituda impulsa u našem modelu zapravo predstavlja vrednost Džulovih gubitaka u motoru.



Slika 7: Blok prenosne funkcije – Transfer Fcn



Slika 8: Podešavanje parametara bloka Pulse Generator

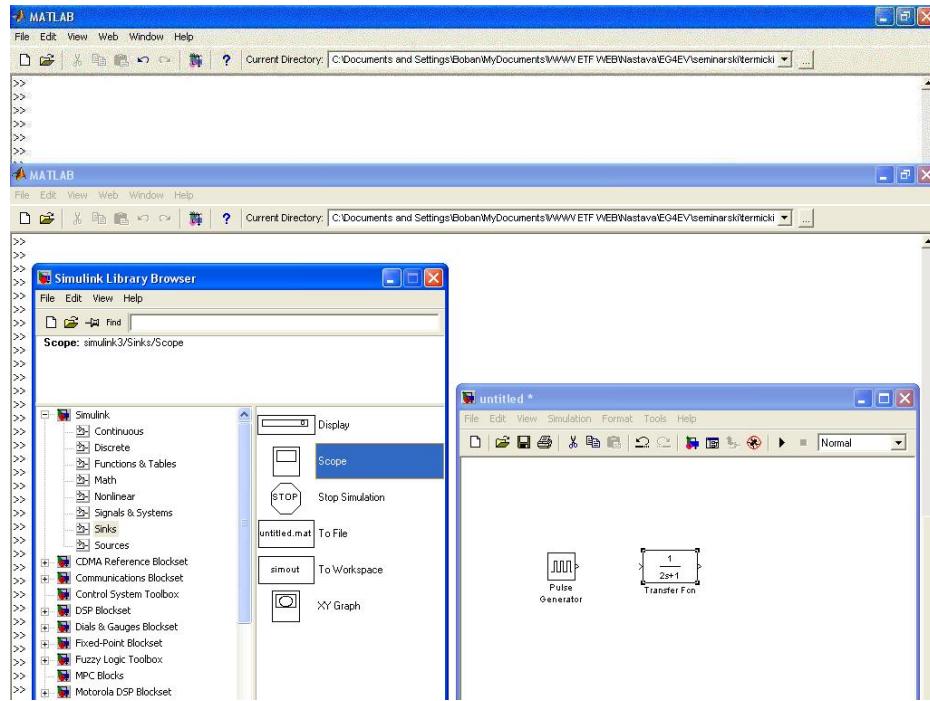


Slika 9: Podešavanje parametara bloka Transfer Fcn

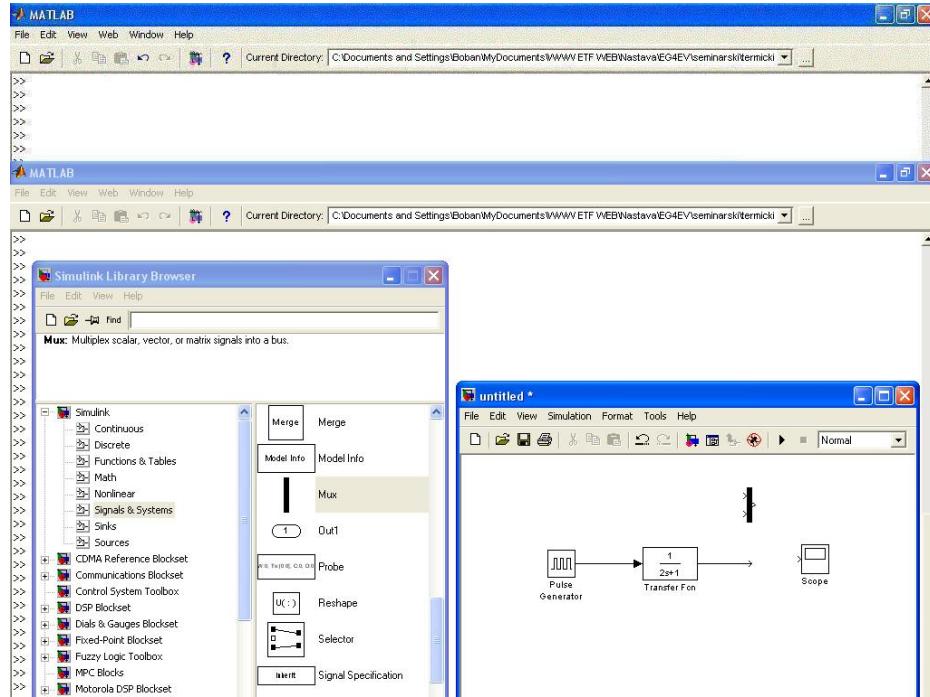
U slučaju bloka *Transfer Fcn* mogu se podešavati koeficijenti polinoma u brojiocu (*Numerator*) i imeniocu (*Denominator*) funkcije prenosa. Oni se unose u odgovarajuća polja kao nizovi pri čemu je prvi član niza koeficijent uz član najvišeg stepena u polinomu. Podesićemo brojilac na 1 a imenilac na polinom  $2s+1$  (slika 9). U našem sistemu ovo će značiti da je vrednost termičkog otpora jednaka  $R_{th} = 1 \frac{K}{W}$  a vrednost termičke kapacitativnosti  $C_{th} = 2 \frac{J}{K}$ .

Sada ćemo u model uneti izlaz – blok *Scope*. Ovaj blok nalazi se u biblioteci *Simulink - Sinks* (slika 10). Ovaj blok omogućuje iscrtavanje grafika signala koji se nalaze na njegovom ulazu. Mi ćemo na ovom grafiku prikazati signale ulaza u blok prenosne funkcije (u našem slučaju to su Džulovi gubici – izlaz bloka *Pulse Generator*) kao i signal izlaza iz bloka prenosne funkcije (signal nadtemperature).

Da bismo mogli na istom grafiku da prikažemo oba ova signala neophodan nam je blok koji će multipleksirati oba ova signala na jedan ulaz bloka *Scope*. Blok koji vrši ovu funkciju zove se *Mux* i nalazi se u biblioteci *Simulink - Signals & Systems* (slika 11).



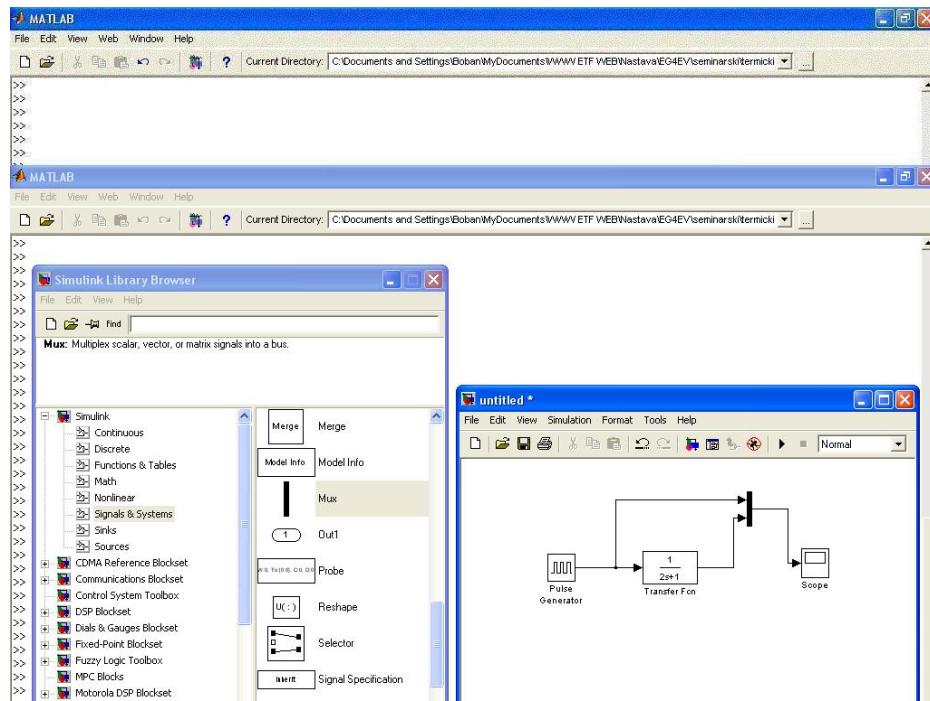
Slika 10: Blok Scope



Slika 11: Blok Mux

Sada je potrebno međusobno povezati sve blokove u modelu. Povezivanje blokova vrši se jednostavnim povlačanjem linije od izlaza jednog bloka do ulaza

drugog bloka (slično drag&drop principu). Način na koji je potrebno povezati elemente u modelu prikazan je na slici 12.

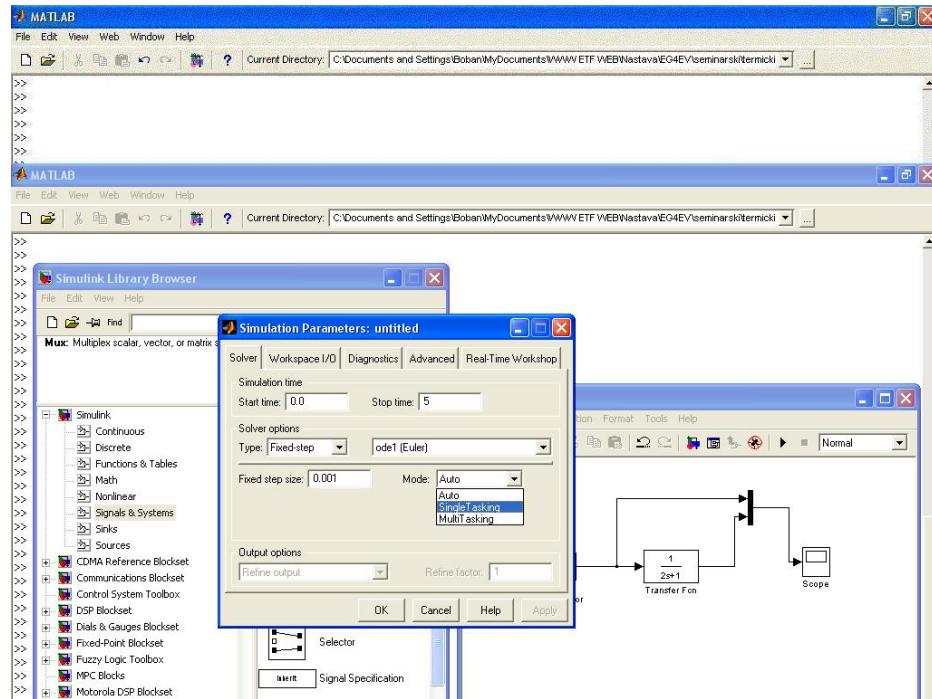


Slika 12: Povezivanje blokova unutar modela

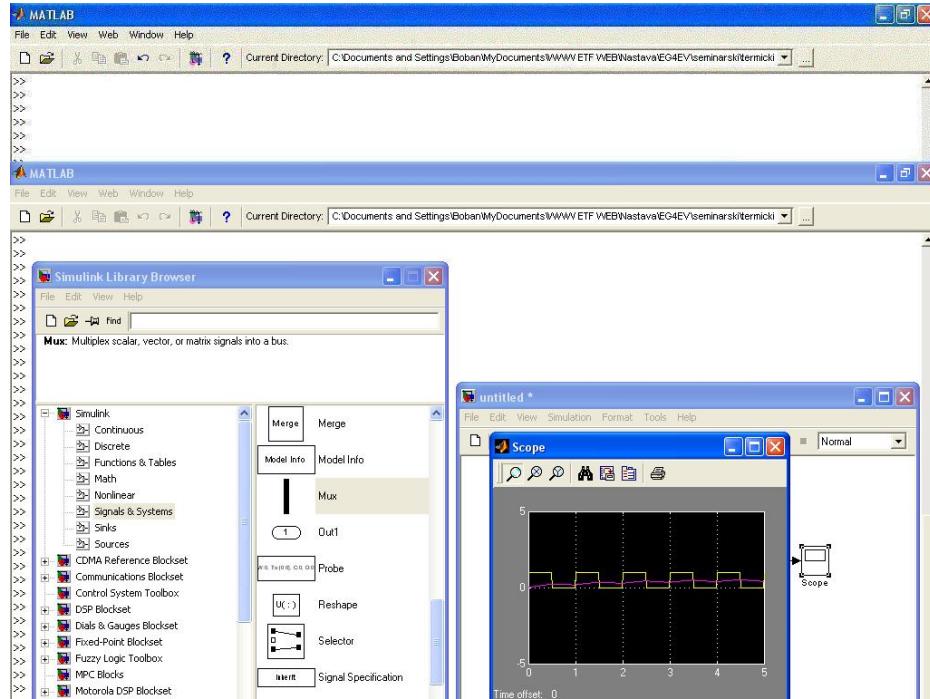
Ovime je formiran *Simulink* model termičkog modela motora. Sada je potrebno podešiti parametre simulacije pre nego što se simulacija pusti u rad. Ova podešavanja vrše se u prozoru koji se dobija biranjem opcije *Simulation parameters...* iz padajućeg menija *Simulation*.

U ovom meniju mogu se podešiti trenutak početka simulacije – *Start time*; trenutak kraja simulacija – *Stop time*; kao i neka podešavanja vezana za metod proračuna koji će simulacija koristiti. Mi ćemo početni trenutak simulacije podešiti na 0, a vreme kraja simulacije na 5 sekundi. U polju *Type* unutar sekcije *Solver options* odabratemo *Fixed-step* i Ojlerov metod proračuna – *ode1 (Euler)*. Podesićemo vrednost koraka simulacije na 0,001 sekundi i mod simulacije na *Single-tasking*.

Sada je simulacija u potpunosti spremna. Klikom na dugme za start simulacije koje se nalazi na gornjem toolbar-u prozora modela pokreće se simulacija. Kraj simulacije signaliziran je zvučnim signalom, dok se u slučaju dugačkih simulacija vreme do kog je proračun simulacije stigao prikazuje u dnu ekrana.

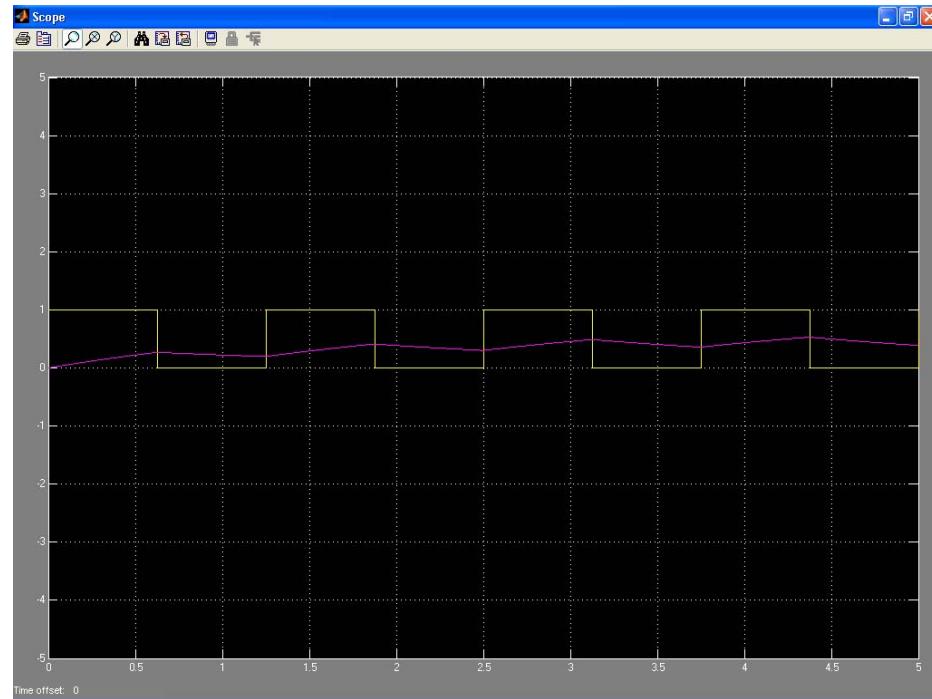


Slika 13: Podešavanja parametara simulacije

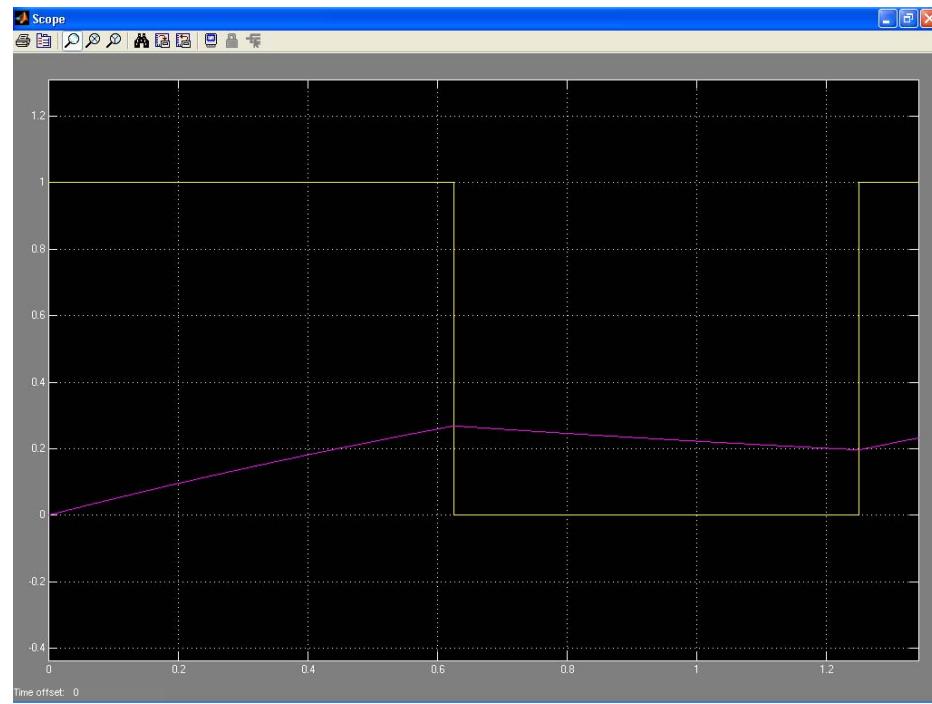


Slika 14: Prikaz rezultata simulacije

Dvostrukim klikom na blok **Scope** dobijaju se grafici koji predstavljaju rezultate simulacije (slika 14). Prozor u kome su prikazani ovi rezultati može se uvećati (slika 15) kao što je moguće i uvećati detalj grafika (slika16).



Slika 15: Uvećan prozor grafika iz bloka Scope



Slika 16: Uvećan detalj grafika sa prethodne slike

## 7. Primeri

*Zadatak 1:*

*BLDC motor poseduje sledeće parametre:*

$R_{th}=37,8\text{K/W}$ ,  $C_{th}=15,7\text{J/K}$ ,  $\theta_{max}=130^{\circ}\text{C}$ . Ako je spoljna temperatura  $23^{\circ}\text{C}$  a otpornost statorskog namotaja ovog motora  $R=7,75\Omega$  koliko vremena će motor biti u stanju da podnese rad sa strujom od  $1\text{A}$ ?

Na osnovu podatka o otpornosti statorskog namotaja i sruje koja kroz njega protiče zaključujemo da će snaga Džulovih gubitaka u motoru biti:

$$P_J = RI^2 = 7,75\text{W}$$

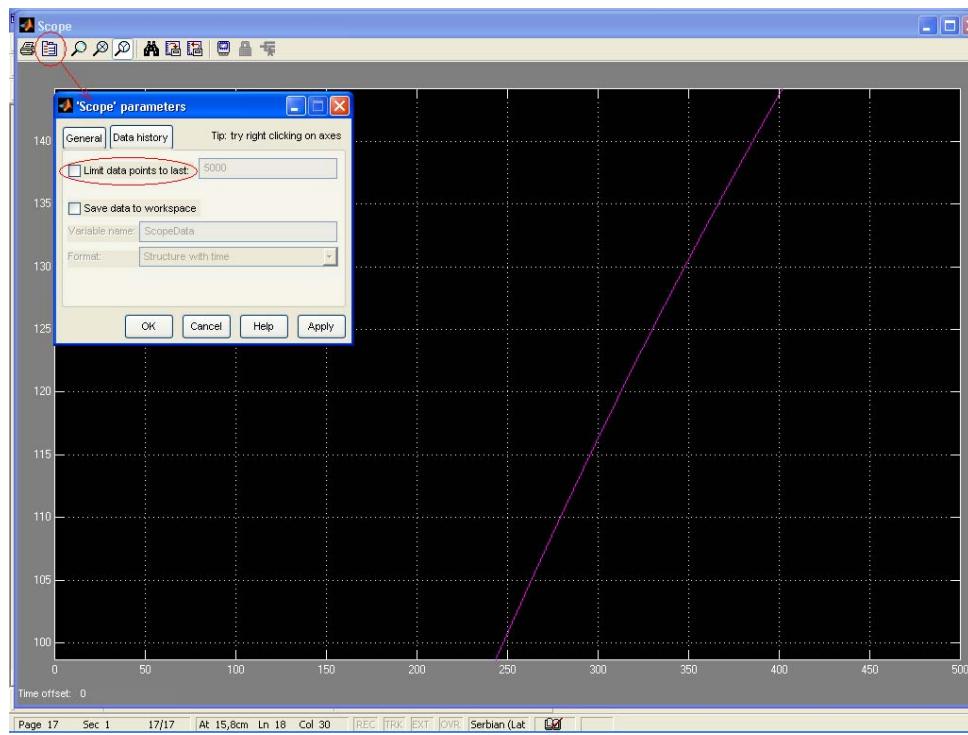
Dakle ovu vrednost treba postaviti za amplitudu impulsnog generatora u *Simulink* modelu. Na osnovu termičkih parametara motora, možemo odrediti prenosnu funkciju njegovog modela kao:

$$\frac{37,8}{37,8 \cdot 15,7s + 1} \text{K/W} = \frac{37,8}{593,46s + 1} \text{K/W}$$

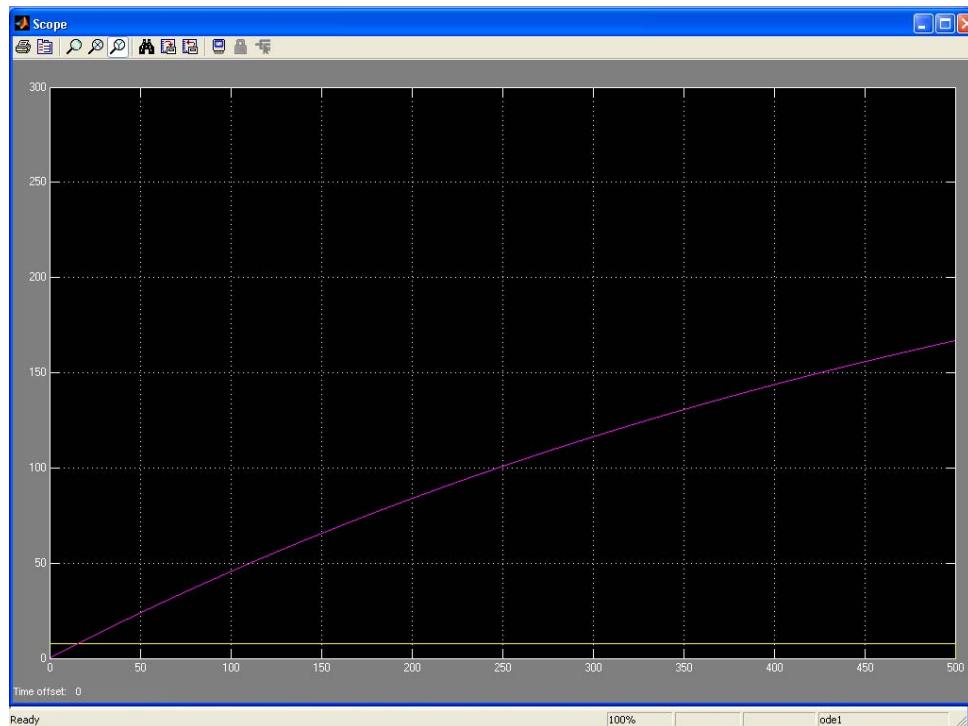
Podesimo još periodu impulsnog generatora u modelu na 1000s i vreme trajanja simulacije na 500s. Pustimo sada model u rad. Kada po završetku simulacije pogledamo grafike dvostrukim klikom na blok *Scope*, videćemo da se na ovom grafiku vidi samo poslednjih nekoliko sekundi simulacije. Ovo je iz razloga što je po default-u blok *Scope* podešen tako da prikazuje samo poslednjih 5000 odbiraka na graficima (ovo je iz razloga bržeg rada kompleksnih modela). Da bismo mogli da vidimo grafike celokupne simulacije potrebno je da izvršimo kratko podešavanje bloka *Scope*.

Kada otvorimo prozor bloka *Scope*, u njegovom gornjem delu nalazi se toolbar. Druga ikonica sa leve strane u ovom toolbar-u je ikonica *Parameters* (slika17). Kada kliknemo na ovu ikonu dobićemo prozor koji nam omogućava neka podešavanja bloka *Scope*. U delu *Data history* ovog prozora, nalazi se parametar: *Limit data points to last*: koji je po defaultu namešten na 5000 odbiraka. Menjanjem ovog broja može se dakle povećati ili smanjiti broj odbiraka koji će biti prikazani na grafiku unutar bloka *Scope*. Međutim takođe je moguće ovo ograničenje i potpuno ukinuti. Sa leve strane ovog parametra nalazi se kućica (*checkbox*). Ukoliko ova

kućica nije selektovana, tada neće biti ograničenja u pogledu maksimalnog broja odbiraka koji će biti prikazani na grafiku (slika 17).



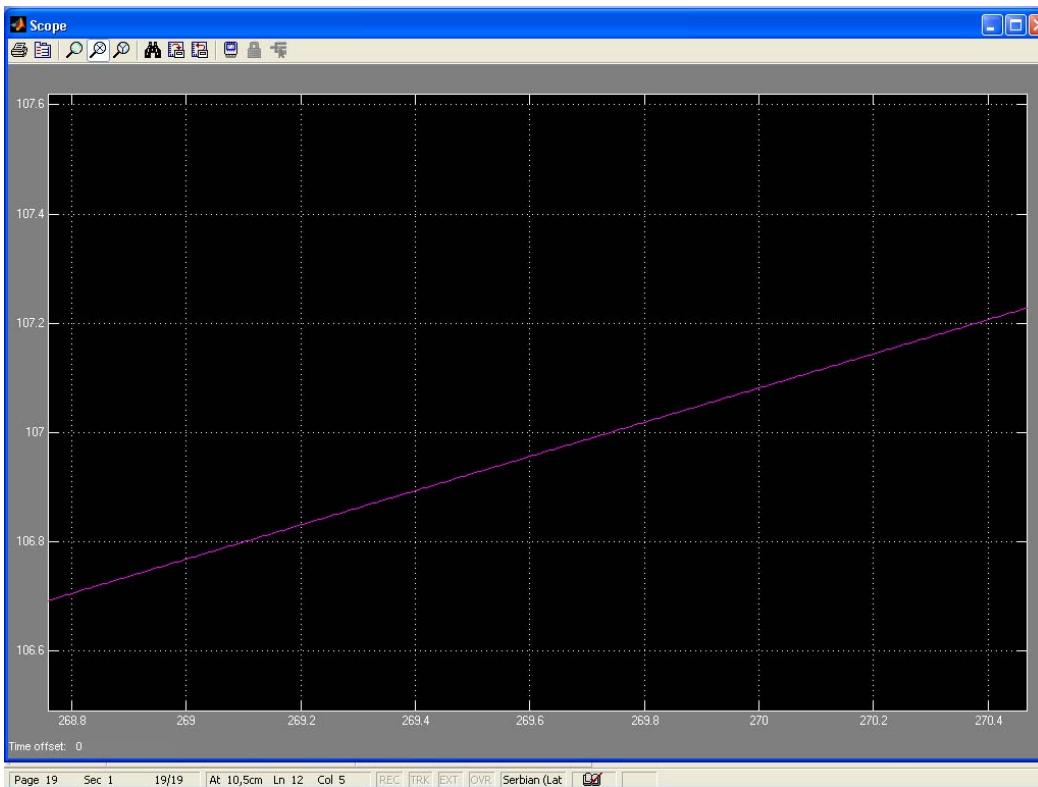
Slika 17: Podešavanje parametara bloka *Scope*



Slika 18: Izgled grafika dobijenih simulacijom

Kada smo izvršili ovo podešavanje, pustimo simulaciju ponovo i fdobićemo grafik sa slike 18. Na ovim graficima ljubičastom bojom prikazana je nadtemperatura motora u odnosu na temperaturu sredine (u našem slučaju  $23^{\circ}\text{C}$ ). Dakle ako je kritična temperatura rada za motor  $130^{\circ}\text{C}$ , a temperatura sredine u kojoj se motor nalazi  $23^{\circ}\text{C}$ , tada je očigledno da je maksimalna nadtemperatura koju je motor u stanju da «istrpi»  $107^{\circ}\text{C}$ . Dakle, da bismo utvrdili koliko vremena će motor moći da radi u gore opisanim uslovima moramo utvrditi trenutak u kome je nadtemperatura motora porasla iznad granice od  $107^{\circ}\text{C}$ .

Ovo je najlakše utvrditi zumiranjem grafika oko ove kritične vrednosti (na primer zumiranjem po Y-osi). Korišćenjem opcija iz toolbox-a dobijen je grafik na slici 19 sa koga se zaključuje da će do pregrevanja motora doći nakon približno 270s tj. 4,5 minuta.



Slika 19: Detalj grafika sa slike 18 – jasno se vidi da do pregrevanja dolazi nakon 270s

Zadatak 2:

Naka BLDC motor poseduje sledeće parametre:  $R_{th}=29\text{K}/\text{W}$ , termičku vremensku konstantu  $\tau=11,3\text{min}$  i maksimalnu radnu temperaturu  $\theta_{max}=130^\circ\text{C}$ . Ukoliko je otpornost statorskog namotaja  $R=4,19\Omega$ , simulacijama utvrditi približnu vrednost maksimalne struje koju je motor u stanju da podene u trajnom radu (smatrati da je temperatura ambijenta  $0^\circ\text{C}$ ).

Zadatak 3:

Za BLDC motor parametara:  $R_{th}=22,3\text{K}/\text{W}$ ,  $C_{th}=35,25\text{J/K}$ ,  $\theta_{max}=130^\circ\text{C}$ , odrediti maksimalno vreme rada sa stujom od  $0,5\text{A}$ . Temperatura ambijenta je  $35^\circ\text{C}$ , a statorska otpornost motora iznosi  $R=2,15\Omega$ .